

4 Mathematische Grundbildung

4.1 Zur Konzeption der Mathematiktests

Die in PISA 2000 verwendeten Mathematiktests basieren auf den Begriffen *Mathematical Literacy* bzw. mathematische Grundbildung, wie sie in den internationalen und nationalen PISA-Rahmenkonzeptionen entwickelt worden sind. Mathematische Grundbildung wird als die Fähigkeit einer Person definiert, die Rolle zu erkennen und zu verstehen, die die Mathematik in der Welt spielt, fundierte mathematische Urteile abzugeben und sich auf eine Weise mit der Mathematik zu befassen, die den Anforderungen des gegenwärtigen und künftigen Lebens dieser Person als konstruktivem, engagiertem und reflektierendem Bürger entspricht.

Die internationale Rahmenkonzeption stützt sich im Wesentlichen auf Arbeiten des Mathematikers und Mathematikdidaktikers Hans Freudenthal, nach dem in der realen Welt auftretende Phänomene die Grundlage für die Entwicklung mathematischer Begriffe sind. Das Bearbeiten mathematischer Aufgaben in Anwendungszusammenhängen wird als ein zyklischer Prozess des mathematischen Modellierens verstanden. Er beginnt mit dem Erkennen einer Problemstellung und ihrer Übertragung in einen mathematischen Ansatz; dann folgen die Verarbeitung dieses Ansatzes, die Interpretation der Ergebnisse und gegebenenfalls die Überprüfung der Adäquatheit des gewählten Ansatzes.

- Mathematische Kompetenz im Sinn von PISA ist mehr als die Kenntnis mathematischer Sätze und Regeln und die Beherrschung mathematischer Verfahren. Mathematische Kompetenz zeigt sich vielmehr im verständnisvollen Umgang mit Mathematik und in der Fähigkeit, mathematische Begriffe als „Werkzeuge“ in einer Vielfalt von Kontexten einzusetzen.
- Die Aufgaben der PISA-Tests lassen sich nach zwei Arten der Modellierung klassifizieren; es gibt
 - *rechnerische Modellierungsaufgaben*: Dies sind Aufgaben, bei denen die Mathematisierung auf rechnerisch durchzuführende Modelle hinausläuft. Typische Beispiele sind „klassische“ Textaufgaben – von eingekleideten Aufgaben bis hin zu komplexeren Anwendungsproblemen.
 - *begriffliche Modellierungsaufgaben*: Hierzu gehören vor allem Aufgaben, zu deren Lösung ein begrifflich geprägter Zusammenhang herzustellen ist. Die Lösung kann bis zur strukturellen Verallgemeinerung einer Situation oder dem Entwerfen einer umfassenden Strategie reichen.
- Die deutsche Mathematikexpertengruppe betrachtet die internationale Rahmenkonzeption als einen allgemeinen normativen Horizont, vor dem man auch die Leistungen der deutschen Schülerinnen und Schüler sehen darf. Sie schlägt aber gleichzeitig Ergänzungen vor, um sowohl dem Allge-

meinbildungsauftrag des Mathematikunterrichts besser gerecht zu werden als auch der im deutschen Mathematikunterricht vorherrschenden Kalkül-orientierung durch stärkere Berücksichtigung technischer Fertigkeiten Rechnung zu tragen. Deshalb gibt es im nationalen Ergänzungstest nicht nur rechnerische und begriffliche Modellierungsaufgaben, sondern auch

- *technische Aufgaben*: Bei ihnen sind vorgegebene Ansätze nach bekannten Algorithmen abzuarbeiten. Die technischen Aufgaben machen etwa ein Viertel der nationalen Aufgaben aus.

Wie Dimensionalitätsuntersuchungen gezeigt haben, messen die internationalen und die nationalen Aufgaben die den Testleistungen zu Grunde liegenden mathematischen Fähigkeiten in vergleichbarer Weise.

4.1.1 Kompetenzstufen

Es werden fünf Stufen mathematischer Kompetenz definiert, auf denen die Personen mit ihren Fähigkeiten und die Aufgaben mit ihren Schwierigkeitskennwerten verortet werden.

Kompetenzstufe I
(Skalenwerte 329–420):
Rechnen auf
Grundschulniveau

Personen, die dieser Stufe zugeordnet werden, verfügen lediglich über arithmetisches und geometrisches Wissen auf Grundschulniveau. Sie können dieses Wissen abrufen und unmittelbar anwenden, wenn die Aufgabenstellung von vornherein eine bestimmte Standard-Mathematisierung nahe legt. Wer allenfalls Stufe I erreicht, gehört zur potenziellen Risikogruppe derer, die nur schwer einen Ausbildungsplatz finden.

Kompetenzstufe II
(Skalenwerte 421–511):
Elementare Modellierungen

Auf dieser Stufe werden auch einfache begriffliche Modellierungen vorgenommen, die in einen außermathematischen Kontext eingebettet sind. Personen auf dieser Kompetenzstufe können unter mehreren möglichen Lösungsansätzen den passenden finden, wenn durch Graphiken, Tabellen, Zeichnungen usw. eine Struktur vorgegeben ist, die das Modellieren erleichtert. Auch auf dieser Stufe sind allerdings nur die Wissensinhalte der Grundschulmathematik sicher verfügbar.

Kompetenzstufe III
(Skalenwerte 512–603):
Modellieren und begriffliches
Verknüpfen auf dem Niveau
der Sekundarstufe I

Mit dem Erreichen dieser Stufe findet im Vergleich zu Stufe II in mehrfacher Hinsicht ein qualitativer Sprung statt. Schülerinnen und Schüler auf dieser Kompetenzstufe verfügen auch über einfache Wissensinhalte der Sekundarstufe I, also über den Standardstoff der Lehrpläne aller Schulformen. Sie können Konzepte aus unterschiedlichen mathematischen Bereichen verknüpfen und zur Lösung von Problemstellungen nutzen, wenn visuelle Darstellungen den Lösungsprozess unterstützen. Diese Stufe wird von der deutschen Expertengruppe für den Bereich Mathematik als Standardniveau mathematischer Grundbildung betrachtet.

Kompetenzstufe IV
(Skalenwerte 604–695):
Umfangreiche
Modellierungen auf der Basis
anspruchsvoller Begriffe

Schülerinnen und Schüler auf dieser Kompetenzstufe bewältigen im technischen Bereich umfangreichere Verarbeitungsprozesse, können also eine Lösung über mehrere Zwischenergebnisse hinweg aufbauen. Auch offene Modellierungsaufgaben werden bewältigt, bei denen man unter mehreren Lösungswegen einen eigenen finden muss. Verstärkt können auch innermathematische begriffliche Zusammenhänge modelliert werden.

Die Schülerinnen und Schüler, die dieser Kompetenzstufe zugeordnet werden, können auch sehr offen formulierte Aufgaben bewältigen, bei denen ein Modell frei gewählt bzw. selbst konstruiert werden muss. Begriffliche Modellierungsleistungen auf dieser höchsten Stufe umschließen häufig Begründungen und Beweise sowie das Nachdenken über den Modellierungsprozess selbst.

Kompetenzstufe V
(Skalenwerte über 696):
Komplexe Modellierung und
innermathematisches
Argumentieren

4.2 Mathematikleistungen der 15-Jährigen in den PISA-Teilnehmerstaaten und in 14 Ländern der Bundesrepublik (Ergebnisse des internationalen Tests)

Die Mittelwerte der Leistungen in den verschiedenen Ländern der Bundesrepublik streuen über weit mehr als die Hälfte der OECD-Staaten hinweg. Dennoch sind sie in der Regel im unteren Bereich des Leistungsspektrums zu finden. Sieht man von Bayern, Baden-Württemberg, Sachsen, Thüringen und Rheinland-Pfalz ab, bleiben alle Länder *unter* dem OECD-Durchschnitt. Die einzigen Länder mit überdurchschnittlichen Leistungen, nämlich Bayern und Baden-Württemberg, gehören – an den internationalen Standards gemessen – nicht zur Spitzengruppe.

Nicht nur die alten, sondern auch die neuen Länder verteilen sich über einen sehr großen Bereich des internationalen Leistungsspektrums. Dies ist insofern bemerkenswert, als es in den neuen Ländern bis 1990 ein egalitäres Schulsystem mit einer homogenen Kultur des Mathematikunterrichts gegeben hat. Heute lässt sich dies nur noch daran ablesen, dass die durchschnitt-

Abbildung 4.1 Mathematikleistungen in 14 Ländern der Bundesrepublik und in ausgewählten OECD-Staaten (Mittelwerte/Standardfehler)

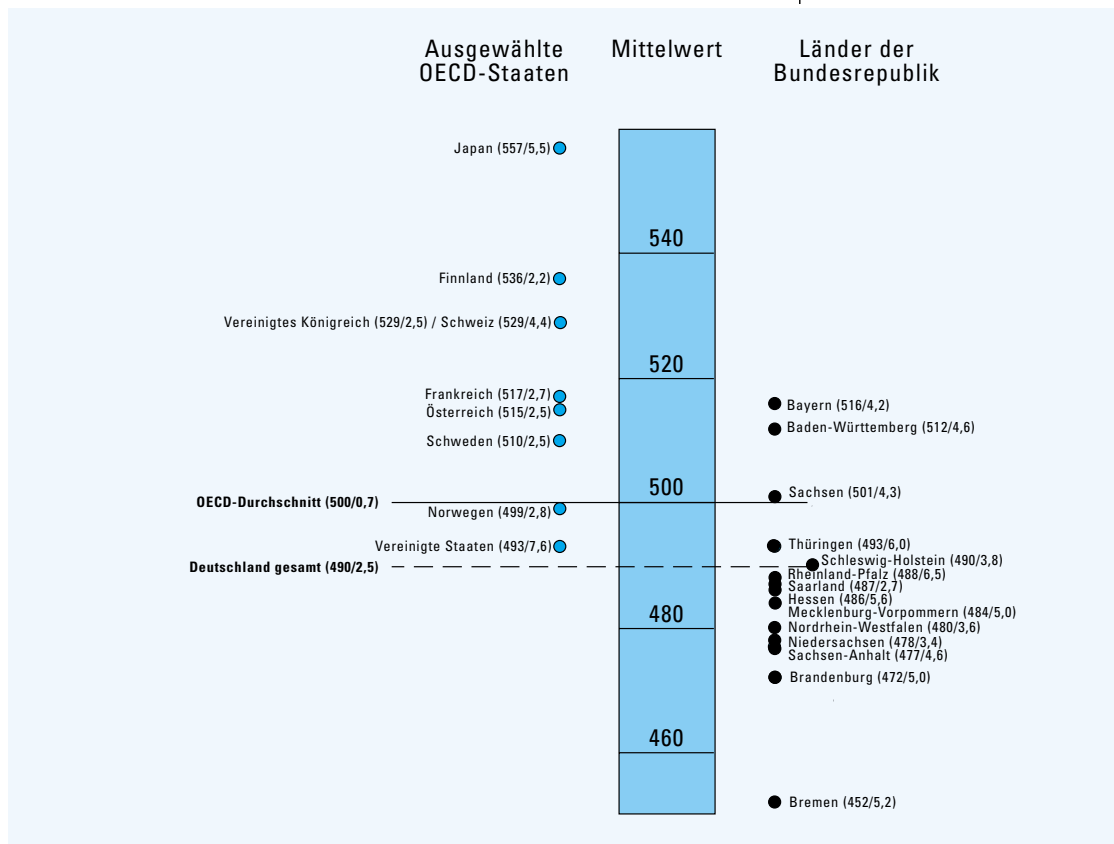
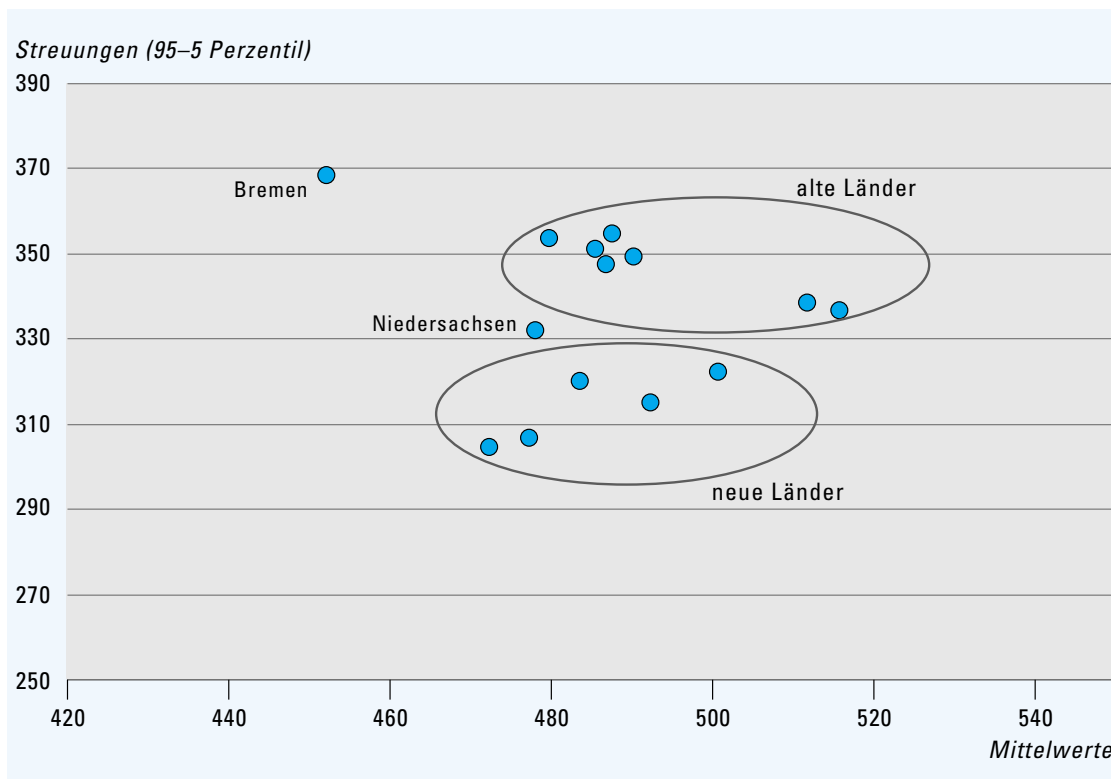


Abbildung 4.2 Mittelwerte und Streuungen der Gesamtleistungen der 15-Jährigen in 14 Ländern der Bundesrepublik

liche Leistungsstreuung in den neuen Ländern kleiner ist als in den alten; an internationalen Standards gemessen ist sie aber keineswegs gering.

Ordnet man die Länder der Bundesrepublik nach der Höhe der Mittelwerte und dem Ausmaß der Streuung, findet man zwei klar voneinander unterschiedene Gruppen: Fast alle alten Länder weisen – bei unterschiedlichen Mittelwerten – vergleichbar hohe Streuungen auf. Die neuen Länder haben ein etwas homogeneres Leistungsspektrum und etwas geringere Streuungen. Aber auch hier ist ein hohes Leistungsniveau bei gleichzeitiger Reduktion von Leistungsunterschieden nicht erreicht worden. Dagegen treten in mehreren OECD-Staaten hohe Leistungsmittelwerte in Mathematik zusammen mit einer geringeren Streuung der Leistungen auf.



4.3 Verteilung der Leistungen der 15-Jährigen auf die fünf Kompetenzstufen (Ergebnisse des internationalen Tests)

Die folgende Abbildung zeigt, wie hoch die Anteile der 15-Jährigen in den einzelnen Ländern sind, die – an der erreichten Kompetenzstufe gemessen – zur Risikogruppe gehören und wie viele das Standardniveau mathematischer Grundbildung erreicht haben oder sogar zur Spitzengruppe zu zählen sind. Die Länder sind nach der Höhe der Mittelwerte der Mathematikleistungen geordnet.

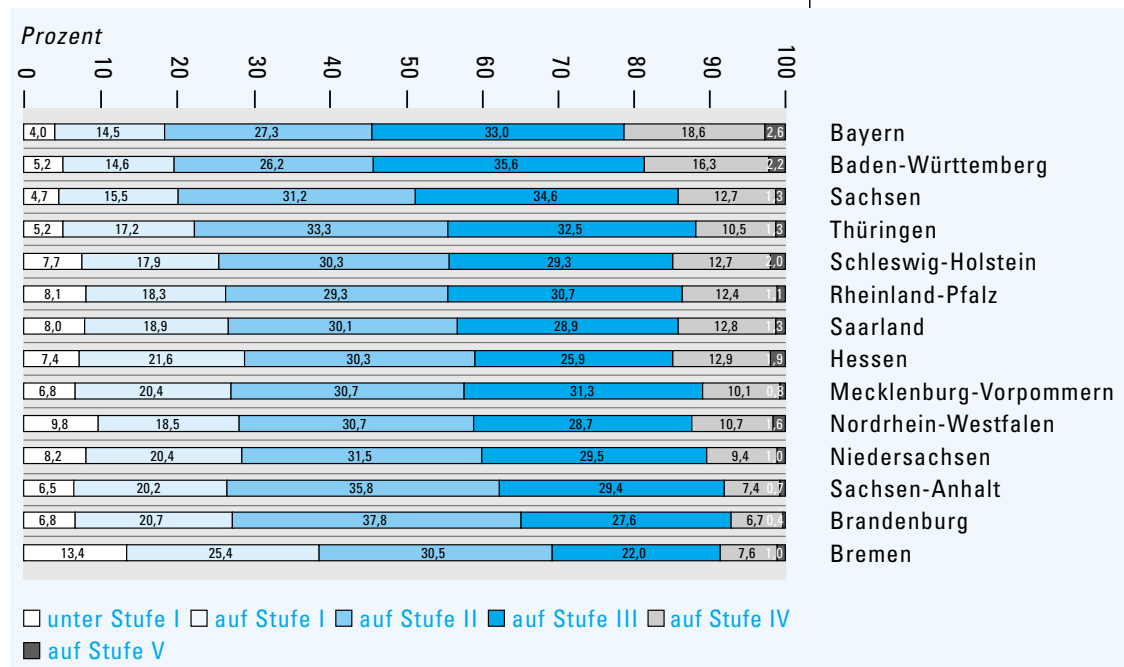
Die Anteile der 15-Jährigen, die allenfalls Kompetenzstufe I erreichen, also zur Risikogruppe gehören, schwanken zwischen rund 19 bzw. 20 Prozent in Bayern, Baden-Württemberg und Sachsen und fast 39 Prozent im Stadtstaat Bremen. Gemessen an den kleinen Anteilen potenzieller Risikokandidaten in

etlichen OECD-Staaten sind nicht nur die Anteile in Bremen, sondern auch die Anteile in den süd- und mitteldeutschen Ländern groß: In Japan und Finnland gehören weniger als 10 Prozent der 15-Jährigen zur Risikogruppe, im Vereinigten Königreich, in der Schweiz und Frankreich sind es weniger als 15 Prozent; weitere Länder haben ebenfalls kleinere Anteile als Sachsen, Baden-Württemberg und Bayern.

Entsprechendes gilt für die Anteile der 15-Jährigen, die das Standardniveau mathematischer Grundbildung erreicht haben oder zur Spitzengruppe zu rechnen sind. Wieder befinden sich Bayern und Baden-Württemberg am oberen Ende der Rangskala der bundesrepublikanischen Länder, ohne sich deshalb mit Staaten wie Japan, der Schweiz oder dem Vereinigten Königreich messen zu können.

Der aus dem ersten PISA-Bericht bekannte Befund, dass das deutsche Schulsystem – verglichen mit den Schulsystemen in etlichen OECD-Staaten – wenig erfolgreich bei der Sicherung des Standardniveaus mathematischer Leistungen ist, lässt sich in so gut wie allen Ländern der Bundesrepublik an der Verteilung der 15-Jährigen auf die verschiedenen Kompetenzstufen ableiten. Innerhalb Deutschlands gibt es aber auch in Ländern mit unterdurchschnittlichem Niveau relativ große Gruppen leistungsstarker Schülerinnen und Schüler.

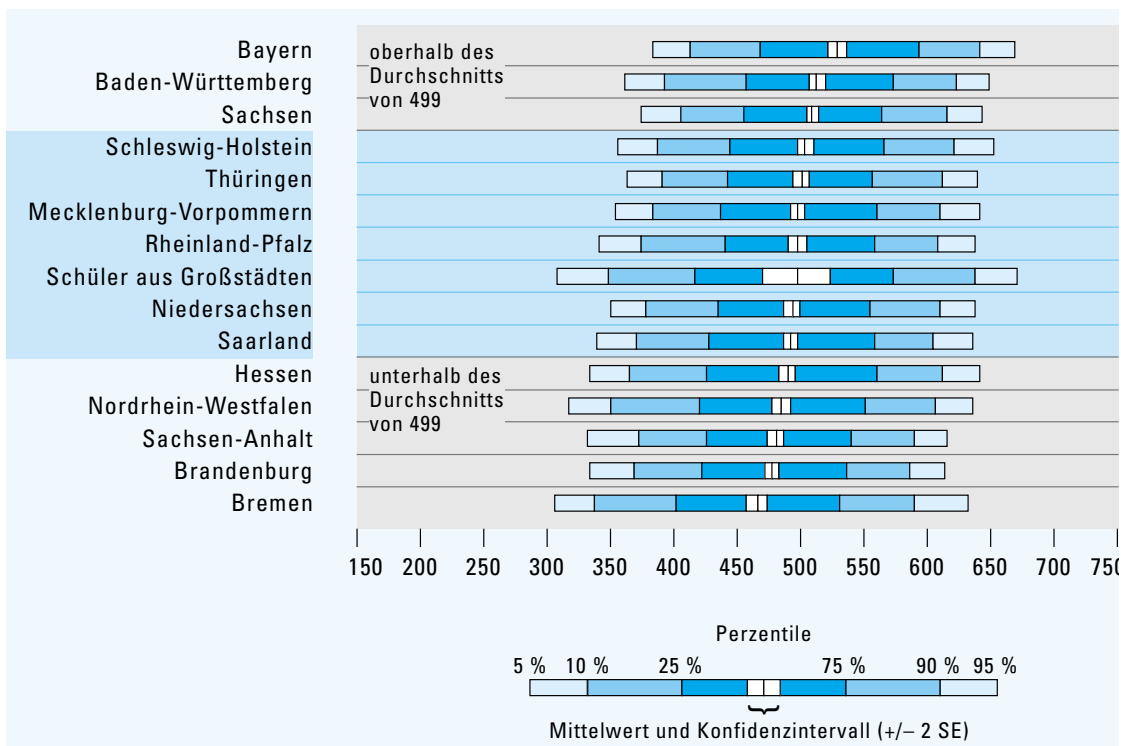
Abbildung 4.3 Anteile der 15-Jährigen pro Kompetenzstufe für 14 Länder der Bundesrepublik



4.4 Mathematikleistungen der Schülerinnen und Schüler der 9. Jahrgangsstufe in 14 Ländern der Bundesrepublik (Ergebnisse des internationalen und des nationalen Tests)

Die Schülerinnen und Schüler der 9. Jahrgangsstufe zeigen in den internationalen Tests homogenere Leistungen als die 15-Jährigen. Die Anteile derer, die zur Risikogruppe gehören, sind in allen Ländern kleiner – teils, weil die Sonderschüler nicht in der Stichprobe der Neuntklässler enthalten sind, teils,

Abbildung 4.4 Perzentilbänder der mathematischen Leistungen der Neuntklässler in 14 Ländern der Bundesrepublik



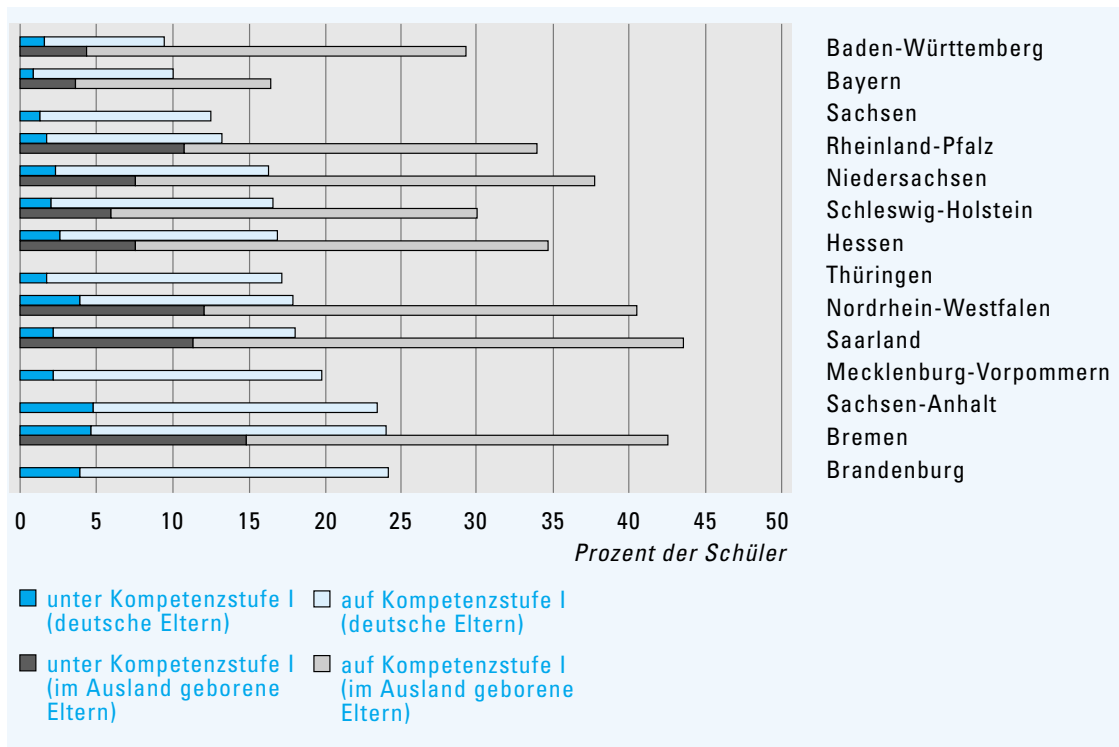
renzen zwischen Bayern und Brandenburg oder dem Stadtstaat Bremen sind ebenfalls noch genauso groß wie bei den 15-Jährigen.

Wenn man die Ergebnisse der curriculumnäheren nationalen Tests betrachtet, findet man innerhalb der Länder geringere Leistungsstreuungen; die Unterschiede, die sich zwischen den Ländern im Leistungsniveau zeigen, nehmen dagegen zu. Die Rangfolge der Länder ändert sich dadurch aber nur geringfügig.

Ein etwas anderes Bild ergibt sich, wenn man die ethnische Herkunft der Schülerinnen und Schüler berücksichtigt. Die folgende Abbildung zeigt (auf der Basis der Ergebnisse der internationalen Tests), wie stark sich die Anteile der zur Risikogruppe gehörigen Neuntklässler in Abhängigkeit davon unterscheiden, ob ihre Eltern beide in Deutschland geboren sind oder ob mindestens ein Elternteil im Ausland geboren ist. Die Abbildung 4.5 lässt im Vergleich mit Abbildung 4.4 auch erkennen, dass sich die Rangfolge der Länder nur moderat ändert, wenn man die deutschen Schülerinnen und Schü-

ler allein betrachtet, deutlicher aber dann, wenn man die Leistungen der Jugendlichen aus Migrantenfamilien untersucht. (Da die Anteile der Neuntklässler aus Migrantenfamilien in den neuen Ländern der Bundesrepublik weniger als 5 Prozent betragen, sind sie nicht in die Analyse einbezogen worden.) Dies hängt mit dem in Kapitel 6 behandelten Sachverhalt zusammen, dass sich die Länder nicht nur in ihren Anteilen an Migranten insgesamt unterscheiden, sondern auch in den Anteilen derjenigen Gruppen, die schlecht in die deutsche Kultur integriert sind und die deutsche Sprache nur unzureichend beherrschen.

Abbildung 4.5 Anteile der Neuntklässler auf und unter Kompetenzstufe I nach dem Geburtsland ihrer Eltern



4.5 Zur Abhängigkeit der Leistungen von sozialstrukturellen Bedingungen

Zu etwas anderen als den bisher berichteten Ergebnissen kommt man, wenn man die Unterschiede in der Gesellschaftsstruktur der verschiedenen Länder berücksichtigt, das heißt die Leistungswerte den externen sozialen Bedingungen entsprechend adjustiert. Die Merkmale, die dazu herangezogen wurden, waren der internationale sozioökonomische Index (ISEI), der Besitz an Kulturgütern und die kulturelle Praxis der Familie. Um die ethnische Herkunft der Schülerinnen und Schüler zu kontrollieren, werden die Ergebnisse für Jugendliche mit und ohne Migrationshintergrund gesondert dargestellt.

Die durchschnittlichen Leistungen der deutschen Schülerinnen und Schüler sind in den prosperierenden Ländern mit günstigen soziokulturellen Bedingungen nach der Adjustierung etwas niedriger, während sie in den

Tabelle 4.1 Adjustierte Werte der Leistungen der Neuntklässler, deren Eltern in Deutschland bzw. im Ausland geboren sind

Ländern mit ungünstigen Bedingungen jetzt höher liegen. Dadurch ändert sich auch die Rangordnung der Länder.

Die Leistungsmittelwerte der Jugendlichen aus Migrantenfamilien, die vielfach zu den unteren sozialen Schichten gehören, werden durch die Adjustierung ebenfalls etwas angehoben. Trotzdem sind die durch die ethnische Herkunft bedingten Leistungsunterschiede in aller Regel sehr groß.

Die Adjustierung der Leistungswerte nähert die Länder einander an; das gilt auch für die Extremgruppen innerhalb der Länder. Der relativ große Abstand von etwa 1/2 Standardabweichung zwischen dem schwächsten und dem stärksten Land bleibt aber bei den Schülerinnen und Schülern mit in Deutschland geborenen Eltern erhalten. Jugendliche aus Migrantenfamilien bleiben auch nach der Adjustierung um etwa 1/2 Standardabweichung in den mathematischen Leistungen hinter den Schülerinnen und Schülern ohne Migrationsgeschichte zurück.

| | <i>Schüler mit in Deutschland geborenen Eltern</i> | | | | <i>Schüler mit im Ausland geborenen Eltern</i> | | | |
|------------------------|--|-----------------|------------|-------------------------|--|-----------------|------------|-------------------------|
| | Mittelwert | Perzentil 95–5* | SE | Relativer Anteil (in %) | Mittelwert | Perzentil 95–5* | SE | Relativer Anteil (in %) |
| Bayern | 534 | 272 | 3,8 | 79,53 | 497 | 271 | 9,4 | 20,47 |
| Baden-Württemberg | 520 | 263 | 4,0 | 72,26 | 479 | 279 | 6,7 | 27,74 |
| Sachsen | 515 | 250 | 2,3 | 95,90 | | | | 4,10 |
| Rheinland-Pfalz | 510 | 253 | 3,2 | 74,45 | 459 | 302 | 7,3 | 25,55 |
| Gesamt | 510 | 271 | 1,3 | 81,65 | 464 | 282 | 3,3 | 18,35 |
| Niedersachsen | 508 | 274 | 3,7 | 80,42 | 456 | 284 | 6,6 | 19,58 |
| Thüringen | 508 | 261 | 2,8 | 97,59 | | | | 2,41 |
| Schleswig-Holstein | 507 | 269 | 3,4 | 85,67 | 458 | 239 | 7,9 | 14,33 |
| Mecklenburg-Vorpommern | 506 | 273 | 2,9 | 97,30 | | | | 2,70 |
| Saarland | 502 | 258 | 3,4 | 81,55 | 446 | 309 | 7,4 | 18,45 |
| Hessen | 501 | 282 | 3,7 | 66,48 | 455 | 272 | 5,8 | 33,52 |
| Nordrhein-Westfalen | 500 | 291 | 4,5 | 69,32 | 451 | 294 | 6,8 | 30,68 |
| Sachsen-Anhalt | 492 | 275 | 3,9 | 96,10 | | | | 3,90 |
| Brandenburg | 487 | 270 | 2,5 | 96,64 | | | | 3,36 |
| Bremen | 487 | 299 | 4,7 | 60,06 | 439 | 292 | 6,6 | 39,94 |

* Differenz zwischen dem 95. und dem 5. Perzentil.

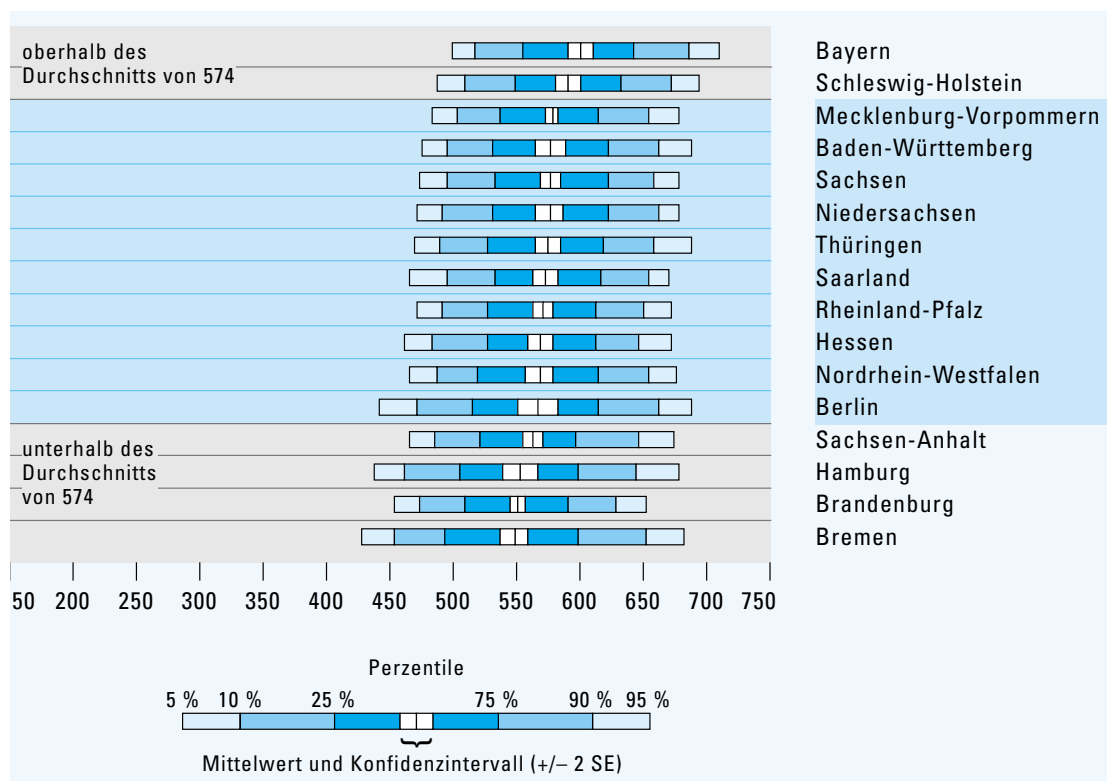
4.6 Die Mathematikleistungen in den 9. Klassen der Gymnasien

Erwartungsgemäß liegen die Neuntklässler in Gymnasien mit einem Mittelwert von 574 Punkten deutlich über den Neuntklässlern aller anderen Schulformen bzw. Bildungsgänge, und die Streuung ihrer Leistungen – gemessen am Abstand zwischen dem 5. und 95. Perzentil – beträgt nur 214 Punkte (anstatt der durchschnittlich 300 Punkte bei allen Neuntklässlern). Das Standardniveau mathematischer Grundbildung wird hier aber von den meisten Schülerinnen und Schülern erreicht: In elf der Länder sind weit mehr als

80 Prozent mindestens auf Kompetenzstufe III. Die Anteile der Neuntklässler in der Spitzengruppe (Kompetenzstufe V) betragen auch in den Gymnasien nur zwischen 0,4 Prozent in Brandenburg und 4,1 Prozent in Bayern und Nordrhein-Westfalen.

Gemessen an den Leistungsmittelwerten zeigt sich auch im Fall der Gymnasien ein beachtlicher Abstand zwischen den verschiedenen Ländern der Bundesrepublik. Von den beiden schwächsten Ländern (Bremen und Brandenburg: 551) bis zum leistungsstärksten Land (Bayern: 601) sind es 50 Punkte. Dies entspricht mehr als 3/4 Standardabweichung der Leistungsverteilung an Gymnasien ($d = .83$). Bei der Beurteilung der Leistungsunterschiede ist allerdings zu berücksichtigen, dass die Anteile der Neuntklässler in Gymnasien nicht überall gleich hoch sind. Im Allgemeinen treten höhere Leistungen eher in Ländern mit niedrigen Übergangsquoten auf; die Korrelation beträgt $r = -.54$. Wie in Abschnitt 6 zu sehen sein wird, können aber auch zwischen Ländern mit einem vergleichbaren relativen Schulbesuch an Gymnasien Leistungsunterschiede auftreten, die nicht zu ignorieren sind.

Abbildung 4.6 Perzentilbänder der Leistungen der Neuntklässler in Gymnasien



In den Gymnasien der meisten Länder der Bundesrepublik wird das Standardniveau mathematischer Grundbildung von mindesten 80 Prozent aller Schülerinnen und Schüler der 9. Jahrgangsstufe erreicht. Die deutlichen Leistungsunterschiede zwischen den Ländern werden zum Teil durch die Expansionsraten ihrer Gymnasien erklärt: Das heißt, in Ländern mit niedrigen Übergangsquoten sind die durchschnittlichen Leistungen der Schülerinnen und Schüler tendenziell besser als in Ländern mit relativ hohen Übergangsquoten. Es gibt jedoch gleichzeitig Beispiele, die belegen, dass auch bei steigendem relativen Schulbesuch an Gymnasien ein überdurchschnittliches mittleres Leistungsniveau erreicht werden kann (siehe Abschnitt 6).